جلسه چهاردهم

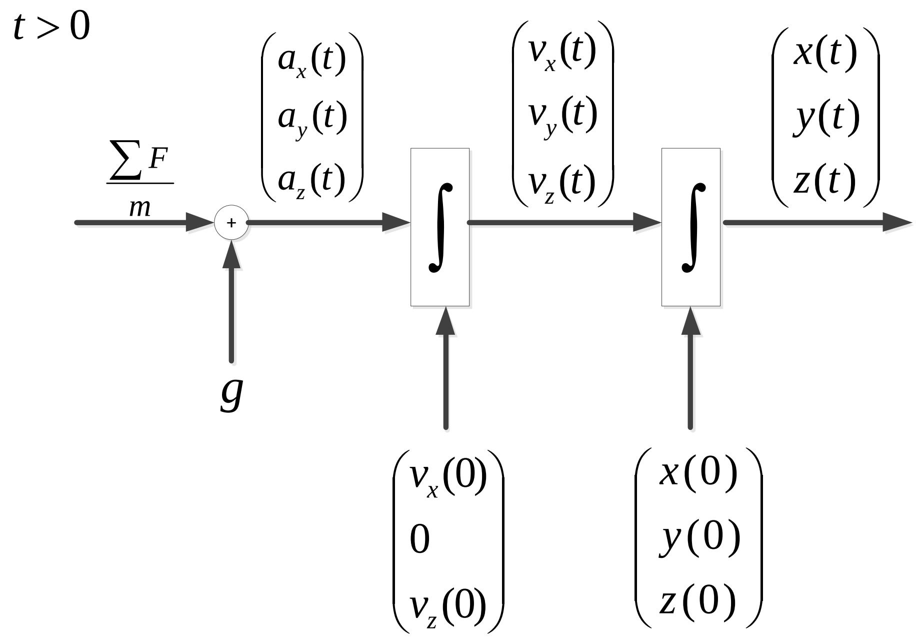
آن‌چه که تا کنون راجع به حرکت پرتابه آموختید با این فرض بود که هوایی وجود ندارد. ولی در واقعیت در تمامی حرکات اجسام و از جمله حرکت پرتابه هوا و مقاومت هوا حضور دارند. به عبارت دیگر یکی از داده‌ها و ستانده‌های دیگر بین هوا و جسم در حال حرکت در هوا است. در حقیقت بین جسم در حال حرکت و هوا اصطکاکی وجود دارد و هوا سعی می‌کند که مانع حرکت این جسم یا پرتابه گردد.

مقاومت هوا در برابر حرکت پرتابه به عواملی نظیر سرعت حرکت پرتابه در هوا، شکل پرتابه و چگالی هوا بستگی دارد. همان‌طور که می‌دانید چگالی هوا با تغییر زیاد در ارتفاع از سطح زمین تغییر می‌کند. اگر فرض نماییم شکل پرتابه نیز ثابت باشد مقاومت هوا با تغییر در سرعت حرکت پرتابه تغییر می‌کند. در پرتاب‌های معمولی عمدتاً مقاومت هوا با توان دوم سرعت متناسب دارد.

برای درک بهتر این موضوع با مثالی به بیان نکات آن می‌پردازیم.

فرض کنیم دستگاه چسبیده به زمین را به‌گونه‌ای تعریف نمودیم که راستای سوم این دستگاه به سمت پایین و در راستای شتاب گرانشی زمین (g) باشد. فرض می‌کنیم حرکت پرتابه در صفحه‌ای شامل محور سوم و اول (صفحه‌ی XZ) رخ دهد. به عبارت دیگر پرتابه هیچ گونه حرکتی در راستای محور دوم دستگاه چسبیده به زمین ندارد. همچنین فرض کنید حرکت را نسبت به نقطه‌ی آغازین پرتاب (O) بررسی می‌کنیم و نام پرتابه را A می‌نهیم. بنابراین $^{\mathrm{e}}r_{OA}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ می‌باشد. همچنین فرض کنید سرعت اولیه در لحظه‌ی ابتدایی $^{\mathrm{e}}v(0)=\begin{pmatrix}v_x(0)\\0\\v_z(0)\end{pmatrix}$ است که دلیل صفر بودن سرعت اولیه در راستای دوم دستگاه نیز از فرض حرکت پرتابه در صفحه‌ی XZ ناشی می‌شود.نمایش بلوکیِ محاسبهٔ سرعت و جابجایی بر اساس ادبیات کلیِ به دست آمده دربارهٔ جابجایی(قانون دوم نیوتن) به صورت شکل بعد خواهد بود.

توجه داشته باشید که این شکل در حقیقت سه تا نمایش بلوکی را یک‌جا نشان داده است.



مطابق شکل داریم:

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(\tau)d\tau$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(\tau)d\tau$$

البته زمان آغازین صفر یا t_0 در هر لحظه‌ای قابل تعریف است و $\int_0^t a_x(\tau)d\tau$ در حقیقت مساحت زیر منحنی $a_x(\tau)$ بر حسب τ است.

حال فرض می‌کنیم نیروی مقاومت هوا یا $\text{drag}-kv^2$ است. همانطور که از رابطه‌ی نیروی مقاومت هوا مشخص است در خلاف راستای سرعت پرتابه وارد می‌شود و از آن‌جایی که فرض نمودیم پرتابه تنها در راستاهای اول و سوم حرکت می‌کند، نیروی مقاومت هوا $-kv_x^2 - kv_z^2$ است. به این ترتیب ${}^e a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kv_x^2 \\ 0 \\ g - kv_z^2 \end{pmatrix}$ است.

برای بدست آوردن مقدار k و بررسی مفهومی آن، می‌توانید آزمایشی انجام دهید. دو توپ تخم مرغی برداشته و روی سطح یکی از این دو توپ پشم یا پنبه یا پارچه‌ای بچسبانید. سپس به صورت کاملاً مشابه دو توپ را پرتاب کنید. مشاهده خواهید کرد که توپی که اطراف آن را پوشانده اید به دلیل اینکه مقاومت هوای بیشتری به آن

وارد می‌شود یا k بزرگتری دارد برد کوتاهتری داشته و زودتر به زمین می‌نشیند. در اصل نیز رابطه‌ی $-kv^2$ بر اساس آزمایشاتی بدست آمده است. در این زمینه علمی به نام آیرودینامیک یا نیروهای هواحرکتی بوجود آمده است که در آن به بررسی تعاملات پرنده در حال حرکت با هوا می‌پردازند.

حال به دنبال این هستیم که حل بسته‌ای برای $x(t)$ یا $v_x(t)$ در مسأله‌ای که دیاگرام بلوکی آن را رسم نمودیم ارائه دهیم.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -kv_x^2 \to \frac{dv_x}{v_x^2} = -kdt \xrightarrow{\int} -\frac{1}{v_x} = -kt + C \to v_x(t) = \frac{1}{kt - C}$$

و با دانستن $v_x(0)$ داریم:

$$v_x(0) = \frac{1}{-C} \to C = \frac{-1}{v_x(0)}$$

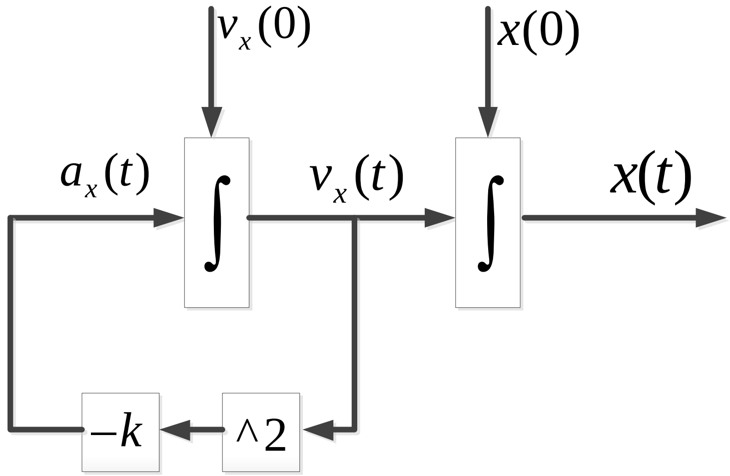
بنابراین:

$$v_x(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_x(0)}} = \frac{v_x(0)}{v_x(0)kt + 1}$$

مطابق رابطه‌ی بالا اگر مقاومت هوایی وجود نداشت یا k صفر بود آن‌گاه همواره $v_x(t) = v_x(0)$ می‌بود. ولی حال که k مخالف صفر است هر چه زمان می‌گذرد و t افزایش می‌یابد مخرج کسر عدد بزرگتر از یک خواهد شد و کل کسر یعنی $v_x(t)$ کاهش می‌یابد. این کاهش تا جایی ادامه پیدا می‌کند که یا پرتابه به مقصد برسد یا سرعت آن صفر شود.

تکلیف) با یک‌بار انتگرال گیری از $v_x(t)$ به حل بسته‌ای برای $x(t)$ برسید. و مشابه روند حل بالا را برای $v_z(t)$ و $z(t)$ انجام دهید. سپس با حذف t بررسی کنید اختلاف برد با فرض وجود هوا نسبت به فرض بدون وجود هوا چقدر می‌شود.

حال با فرض ثابت بودن شتاب در بازه‌ی زمانی Δt می‌خواهیم دیاگرام بلوکی را برای یکی از سه تا ترسیم نموده و نکاتی را بیان نماییم.



فرض می‌کنیم $v_x(0) = 2$ ، $k = 0.15$ و $\Delta t = 0.1$ است. برای لحظات مختلف مقادیر سرعت و شتاب به صورت زیر خواهد بود.

$$a_x(0) = -kv_x(0)^2 = -0.15 \times 4 = -0.6$$

$$v_x(0.1) = v_x(0) + \Delta t a_x(0) = 2 - 0.1 \times 0.6 = 1.94$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید با گذشت یک Δt مقدار سرعت از ۲ به ۱/۹۴ کاهش یافت.

$$a_x(0.1) = -kv_x(0.1)^2 = -0.15 \times (1.94)^2 = -0.564$$

$$v_x(0.2) = v_x(0.1) + \Delta t a_x(0.1) = 1.94 - 0.1 \times 0.564 = 1.8836$$

این بار نیز با گذشت دو Δt مقدار سرعت به میزان بیشتری کاهش یافت.

به این کاری که انجام شد حل معادلات انتگرالی به صورت عددی گفته می‌شود.

تکلیف) ۴ گام دیگر محاسبات بالا را ادامه داده و نتیجه را با حل بسته‌ای که داریم مقایسه کنید.

نرم‌افزار MATLAB نرم‌افزاری است که محاسبات عددی بالا را انجام می‌دهد. لذا به شما توصیه می‌کنیم از بخش Simulink این نرم‌افزار استفاده نموده و دیاگرام نمایش بلوکیِ قبلی را در آن ترسیم نماییم و با تعریف فاصله‌های زمانی و مقدارهای اولیه مقادیر را در عرض زمان کوتاهی برای زمان‌های مختلف بدست آوردید و دوباره یکی بودن حل بسته با حل عددی را بررسی نمایید.